Chúng ta sẽ giải 2 bài toán sau:

**Bài 1 (Mathematical Reflection):** Tìm tất cả các số thực và sao cho tập

S={} có mật độ là 1 trên (0;1)2

**Bài 2 (China TST 2017):** Cho tập hợp thỏa mãn các tính chất sau:

1. Nếu r thì -r
2. Nếu r thì với mọi số nguyên m, (r+)
3. Tồn tại các số thực ,,, sao cho <, < và với mọi x (;) thì x

và với mọi x (;) thì x R\

Với số vô tỉ , đặt ()={|}. Cmr nếu và là những số vô tỉ thỏa

mãn ()=() thì + hoặc là số nguyên

**Lời giải bài 1:**

Đây là trường hợp đặc biệt của định lí Kronecker kinh điển khi m=1 và =2, có thể

xem tại đây: https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker%27s\_theorem

Theo như wikipedia thì ta phải có độc lập tuyến tính trên ℚ, một kết quả khá ảo

và thú vị.

**Bước 1:** Đầu tiên ta sẽ cm nếu độc lập tuyến tính trên ℚ thì S có mật độ 1 trên

(0;1)2. . Ta có S có mật độ 1 trên (0;1)2 khi và chỉ khi với mọi m,,p,q thỏa mãn

0<,,,<1, ta chọn được số nguyên dương t sao cho (;) và (;).

Muốn làm vậy, ta cần bổ đế sau:

**Bổ đề:** Cho 2 số vô tỉ , và số nguyên dương M khi này tồn tại số nguyên dương N

sao cho < và <

Cm: Xét các khoảng , ,…, và xét số nguyên dương

đầu tiên. Khi này theo nguyên lí chuồng và thỏ, trong số đó tồn tại 2 số

nguyên dương phân biệt N1 và N2 trong sao cho và nằm trong cùng

1 khoảng, và và cũng nằm trong cùng 1 khoảng. Khi này xét

thì số thỏa mãn điều kiện, xong.

**Trở lại bài toán,** ta đã chọn được số N sao cho đều rất nhỏ. Wlog, khi

này và đều rất gần so với 0. Ta chọn có t có dạng k và đặt

và . Khi này ta cần chọn số nguyên dương k sao cho (;) và

(;). Đầu tiên ta cần (+;+). Khi này ta sẽ chọn k có dạng . Khi này vì đủ nhỏ nên > nên k (+;+). Bây giờ ta cần (T+;T+), để ý là và

**Lời giải bài 2:** Ta xét 2 trường hợp:

**Trường hợp 1:** độc lập tuyến tính trên ℚ. WLOG, theo điều kiện tập S, ta chỉ

cần xét ,,,q (0;1). Khi này, từ **Lời giải** **bài 1**, ta có thể chọn số nguyên dương

sao cho () và (;) khi này và ko , mâu

thuẫn.

**Trường hợp 2:**  phụ thuộc tuyến tính trên ℚ. Khi này ta có thể giả sử luôn là số hữu tỉ. Dĩ nhiên ta sẽ xét a=p và b=q. Ta có khi và chỉ khi